

# De keuze van het kansmodel in de geodetische netwerkvereffening

Dr. Ir. Tobias Wittwer - Hai Performance BV - tobias.wittwer@haiperformance.nl

## 1 De rol van het kansmodel

In de netwerkvereffening vervult het kansmodel de volgende rollen:

1. Het zorgt voor de **relatieve** weging van de verschillende waarnemingen ten opzichte van elkaar, zodat elke waarneming de juiste bijdrage aan de oplossing levert.
2. Het bepaalt de **absolute** nauwkeurigheid van de geschatte parameters.

In het vervolg wordt het A-model gebruikt om de theorie hierachter te presenteren.

Het kansmodel is in de vereffening vertegenwoordigd door de matrix  $\mathbf{D}$ , de dispersiematrix, variantie-covariantiematrix of kort covariantiematrix. Deze bevat de varianties (kwadraten van de standaardafwijking, formule 6) van de waarnemingen en, mits beschikbaar, informatie over de correlatie tussen de waarnemingen. In veel gevallen is geen informatie over correlaties aanwezig en is de dispersiematrix een diagonale matrix met op de hoofddiagonaal de varianties van de waarnemingen:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

De gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$  is de inverse van de covariantiematrix<sup>1</sup>:

$$\mathbf{W} = \mathbf{D}^{-1} \quad (2)$$

In het geval van een diagonale dispersiematrix is ook de gewichtsmatrix diagonaal en bevat op de hoofddiagonaal de inverse varianties van de waarnemingen:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Hieruit valt eenvoudig af te lezen dat een grote standaardafwijking in een klein gewicht resulteert, en omgekeerd.

De geschatte parameters worden via de welbekende vergelijking van het A-model berekend:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (4)$$

Hierbij is  $\mathbf{A}$  de designmatrix en  $\mathbf{y}$  de waarnemingsvector.

De variantie/covariantiematrix

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \quad (5)$$

bevat op de hoofddiagonaal de variantie van de geschatte parameters. De keuze van het kansmodel en dus  $\mathbf{W}$  bepaalt dus ook de berekende absolute nauwkeurigheid van de geschatte parameters. Een verkeerd kansmodel leidt tot verkeerde nauwkeurigheden hiervan.

---

<sup>1</sup>In de theorie wordt de covariantiematrix meestal om numerieke redenen met een factor  $\sigma_0^2$  verschaalt. Dit is hier gemakshalve achterwege gelaten.

## 2 Drie soorten fouten

Wij kennen drie soorten fouten in de waarnemingen:

1. Stochastische fouten, dus toevallige fouten, "witte ruis". Wij geodeten zijn ons ervan bewust dat geen meting en dus geen waarneming foutloos is. Met de stochastische fouten wordt rekening gehouden door bovengenoemde dispersiematrix  $\mathbf{D}$ . Hierbij wordt verondersteld dat de stochastische fouten de normaalverdeling volgen (de "Gauss'sche kromme").
2. Systematische fouten. Deze zijn niet van toevallige aard, maar hebben een stelselmatige invloed. Als meerdere waarnemingen aan dezelfde stelselmatige fout onderhevig zijn, leidt dit tot correlatie. Bij bekende systematische fouten wordt het vereffeningsmodel uitgebreid om hiermee rekening te houden (bijv. refractiecoëfficiënt). Anders verstoren deze de schatting van de parameters. Met name GNSS kent veel systematische fouten. Hier wordt getracht deze door nauwkeurige modellen van de invloedsfactoren (satellietbanen, ionosfeer, fasecentrumvariatië etc.) al gedurende de basislijnrekening te elimineren.
3. Grove fouten, "uitschieters". Fouten die niet stochastisch of stelselmatig zijn, maar meestal door fouten van de gebruiker ontstaan: verkeerde puntnummers, prismahoogtes en dergelijke (verkeerd aflezen en noteren is door elektronische toestellen verleden tijd). Deze worden door **toetsing** opgespoord en gecorrigeerd.

## 3 Precisie en nauwkeurigheid

In de geodesie wordt een onderscheid gemaakt tussen precisie en nauwkeurigheid. De precisie (engels: precision, Duits: relative of innere Genauigkeit) geeft aan hoe dicht verschillende metingen bij elkaar liggen waarbij de standaardafwijking als maat gehanteerd wordt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}} \quad (6)$$

Hierbij is  $n$  het aantal waarnemingen van dezelfde grootte en  $\bar{y}$  het gemiddelde van de individuele waarnemingen  $y_i$ .

De nauwkeurigheid (engels: accuracy, Duits: absolute of äußere Genauigkeit) geeft aan hoe dicht verschillende metingen bij de waarheid liggen. Als maat wordt de RMS (root mean square) fout gebruikt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \mu)^2}{n}} \quad (7)$$

Hierbij is  $\mu$  de ware waarde van de waargenomen grootte.

In de praktijk weten we de ware waarde echter niet. De precisie weten we bijv. uit een datasheet van een fabrikant, of kunnen hem berekenen door meervoudig te meten. Tijdens de berekening wordt deze getoetst en waar nodig aangepast. Met een geschikte meetopzet met voldoende overtalligheid die alle waarnemingen controleert en juiste toetsing kan aangetoond worden dat de gekozen precisie juist is en dat geen systematische fouten aanwezig zijn. Hiermee wordt de overgang van precisie naar nauwkeurigheid gerealiseerd, want bij afwezigheid van systematische fouten is de precisie gelijk aan de nauwkeurigheid.

## 4 Opbouw initiëel kansmodel

Bij de opbouw van het initiële kansmodel kan met MOVE3 onderscheid gemaakt worden tussen het kansmodel van de waarnemingen en het kansmodel van de stations (opstel-, aansluit- en detailpunten).

Voor de waarnemingen is het zinvol de precisies van het ingezette instrumentarium volgens de fabrikant te gebruiken. Voor een secondetoestel is bijv. een precisie van richtingen en zenit hoeken van 0,3mgon en een afstandsprecisie van 1mm+1ppm een goed uitgangspunt. Een goed gekalibreerd toestel dient in staat te zijn de fabrieksopgave te realiseren.

Het kansmodel voor de stations bestaat uit vier onderdelen:

1. De precisie van de aansluitpunten. Deze speelt bij vrije en absoluut aangesloten vereffening geen rol. Bij gewogen en pseudo-aansluiting wordt getoetst of de gekozen precisie bij de waarnemingen past. De toe te passen waardes zijn afhankelijk van de precisie waarmee het aansluitpunt in coördinaten bepaald is.
2. De idealisatienauwkeurigheid. Deze geeft aan hoe nauwkeurig een punt gemeten kan worden. Een hoek van een huis kan bijv. veel minder nauwkeurig gemeten worden dan het hart van een prisma.
3. De centreerprecisie. Deze geeft aan wat de herhaalprecisie van het opstellen boven hetzelfde punt is. Bij gebruik van dwangcentering is een centreerprecisie van 0,3mm haalbaar.
4. De precisie van de instrumenthoogte. Deze geeft aan hoe precies de hoogte van het instrument gemeten kan worden. Bij het opstellen boven bekende punten en het meten van de instrumenthoogte met rolmaat is 1mm een goede startwaarde. Wordt uitsluitend gebruik gemaakt van vrije standplaatsen en dwangcentering, dan kunnen ook kleinere waardes gekozen worden.

Uiteindelijk geven **F-toets**, **w-toets** en **variantiecomponentenschatting** uitsluitsel of het gekozen kansmodel realistisch is, maar een goed initieel kansmodel vergemakkelijkt en versnelt het proces.

## 5 De F-toets

De F-toets geeft aan of de waarnemingen bij het gekozen kansmodel passen. De toetswaarde wordt als volgt berekend:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y} \quad (8)$$

$$f = \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{e}}}{n - u} \quad (9)$$

waarbij  $n$  het aantal waarnemingen en  $u$  het aantal onbekende parameters is.

De drempelwaarde is afhankelijk van de redundantie  $b = n - u$ .

Voldoet de F-toets niet, dan kan dit verschillende oorzaken hebben:

1. Er zijn grove fouten in de waarnemingen aanwezig. Dit uit zich vaak door zeer grote toetswaardes. De waarnemingen met de grove fouten zijn door de **w-toets** op te sporen en te corrigeren (mits mogelijk, bijv. als verkeerde puntnummering hersteld kan worden) of te verwijderen.
2. Er zijn systematische fouten in de waarnemingen aanwezig. Dit vereist het uitbreiden van het functionele model met bijv. het schatten van een schaalfactor, of het elimineren van de fouten in de preprocessing van de waarnemingen.
3. Het gekozen kansmodel is te optimistisch, de waarnemingen zijn minder nauwkeurig dan aangenomen. Vaak, maar niet in alle gevallen, leidt ook dit tot het verwerpen van de w-toets van een waarneming. De **variantiecomponentenschatting** helpt bij het vinden van een realistisch kansmodel.

## 6 De w-toets

De w-toets en de variantiecomponentenschatting zijn de belangrijkste hulpmiddelen bij het bepalen van een realistisch kansmodel voor waarnemingen die (zover mogelijk) vrij van grove en systematische fouten zijn.

De w-toets wordt gebruikt om te toetsen of een individuele waarneming bij het daarvoor gekozen kansmodel past. De toetswaarde wordt als volgt berekend:

$$w_i = \frac{\hat{e}_i}{\sigma_{\hat{e}_i}} \quad (10)$$

waarbij  $\hat{e}_i$  het residuum van waarneming  $i$  is (uit vector  $\hat{\mathbf{e}}$ , vergelijking 8), en  $\sigma_{\hat{e}_i}$  de standaardafwijking van het residuum, dus de wortel van de hoofddiagonaalelementen van de volgende matrix:

$$\mathbf{Q}_{\hat{e}} = \mathbf{D} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x\mathbf{A}^T \quad (11)$$

De toetswaarde is dus de verhouding van residuum en standaardafwijking van een waarneming. Precieze waarnemingen worden bij een kleiner residuum verworpen dan minder precieze.

De w-toets is significant als de toetswaarde groter is dan 3,29. MOVE3 geeft daarnaast een factor aan waarmee de waarneming verworpen is. Wordt nu de standaardafwijking van de desbetreffende waarneming met deze factor vermenigvuldigd, dan zal de waarneming waarschijnlijk nog steeds verworpen worden - door de grotere standaardafwijking krijgt de waarneming namelijk een kleiner gewicht in de vereffening en dus een groter residuum en daarmee ook een nog grotere toetswaarde (zie vergelijking 10).

Worden veel waarnemingen verworpen, is het niet zinvol om de standaardafwijking van elke verworpen waarneming te verhogen. Het is dan doeltreffender om met behulp van de **variantiecomponentenschatting** te kijken of het gekozen kansmodel realistisch is en aanpassingen voor alle waarnemingen door te voeren - ook en juist door het aanpassen van de centreernauwkeurigheid.

Het is mogelijk dat, ondanks een verworpen F-toets, geen w-toets verworpen wordt. In dit geval zullen één of meerdere waarnemingen toetswaardes hebben die iets kleiner zijn dan 3,29. Door deze niet-verworpen waarnemingen met toetswaardes tussen 2,0 en 3,29 alsnog een grotere standaardafwijking toe te kennen, wordt de toetswaarde van de F-toets kleiner.

Voor driedimensionale waarnemingen (GNSS basislijnen) is er ook de t-toets, deze toetst alle componenten van de basislijn. De w-toets toetst elke component (X, Y, Z) afzonderlijk.

## 7 Variantiecomponentenschatting

De F-toets toetst alle waarnemingen. Hieruit valt echter niet af te leiden hoe goed het kansmodel van de verschillende waarnemingstypes (richtingen, afstanden, zenithoeken, hoogteverschillen etc.) bij de desbetreffende waarnemingen past. De variantiecomponenten zijn de varianties (zie vergelijking 9) per waarnemingstype<sup>2</sup> en worden als volgt berekend:

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum \hat{e}_i \mathbf{W}_{ii} \hat{e}_i}{\sum \mathbf{W}_{ii} \mathbf{Q}_{\hat{e}_{ii}}} \quad (12)$$

waarbij de som over alle waarnemingen van groep  $j$  berekend wordt.

Hoe dichter bij 1, hoe realistischer het gekozen kansmodel is. Is de variantiecomponent groter dan 1, dan is het gekozen kansmodel te optimistisch, de waarnemingen zijn minder precies dan aangenomen. Is de variantiecomponent kleiner dan 1, dan is het gekozen kansmodel te pessimistisch. Als alle variantiecomponenten dicht bij 1 liggen is zowel de relatieve weging van de verschillende waarnemingstypes als ook de berekend absolute nauwkeurigheid (bij geschikte meetopzet met voldoende overtalligheid) van de berekende parameters goed.

Wordt de 2e fase berekening als pseudo of weighted constrained uitgevoerd, wordt ook een variantiecomponent voor de aansluitpunten berekend.

Wijkt een variantiecomponent significant van 1 af (bijv. groter dan 1,3 of kleiner dan 0,8), dan is het zinvol aanpassingen aan het kansmodel door te voeren. Wordt geen w-toets meer verworpen en is ook geen waarneming met een toetswaarde boven 2,0 meer aanwezig, en past het initiële kansmodel bij het gebruikte instrumentarium, dan is het niet zinvol alle waarnemingen van het desbetreffende type minder precies te maken - een gekalibreerd toestel dient immers in staat te zijn de fabrieksopgave te realiseren. Het aanpassen van centreer-, instrumenthoogte- en idealisatieprecisie/nauwkeurigheid is dan doeltreffender:

- Als de variantiecomponent van de richtingen (in mindere mate die van de afstanden) van 1 afwijkt, moet de centreerprecisie aangepast worden.
- Als de variantiecomponent van de zenithoeken van 1 afwijkt, moet de precisie van de instrumenthoogte aangepast worden.

<sup>2</sup>In ieder geval bij MOVE3 - MOVE3 berekent maar één variantiecomponent per waarnemingstype en is niet in staat om bijv. voor elk ingezet instrument eigen variantiecomponenten te berekenen.

- Bij meting op minder goed aan te richten punten (stickers, hoeken van huizen e.d.) is het zinvol de idealisatienauwkeurigheid aan te passen.

Voorzichtigheid is geboden als een bepaald waarnemingstype veel minder waarnemingen bevat dan andere waarnemingstypes. Dit is vaak het geval bij combinatie van tachymetrie en waterpassing, waarbij enkele gewaterpaste hoogteverschillen tegenover een groot aantal zenithoeken staan. De berekende variantiecomponent van de hoogteverschillen kan dan duidelijk groter dan 1 zijn, het is dan niet doeltreffend de precisie van de waterpassing te verlagen.

## 8 Stappenplan

De hiervoor beschreven onderdelen van het bepalen van het kansmodel laten zich in het volgende stappenplan samenvatten:

1. Initiëel kansmodel:
  - (a) Fabrieksopgave voor precisie instrumentarium.
  - (b) Centreerprecisie 0,3mm, precisie instrumenthoogte 1mm bij gebruik van dwangcentreerring.
  - (c) Precisie aansluitpunten afhankelijk van hoe deze bepaald zijn, 5mm X/Y en 3mm voor de hoogte zijn vaak goede startwaardes.
2. Vrije vereffening:
  - (a) Verwijderen van uitschieters met behulp van w-toets. Uitschieters zijn meestal het gevolg van verkeerde puntnummering en verkeerde antennehoogtes, prismahoogtes en prismaconstanten. Ook verworpen waarnemingen met zeer grote verwerpingsfactoren worden in deze stap aangepast.
  - (b) Gebruik van de variantiecomponenten: aanpassen centreer-, instrumentenhoogte- en idealisatieprecisie/nauwkeurigheid en (mits van toepassing) correlatiefactor GNSS totdat alle waarnemingstypes variantiecomponenten in de buurt van 1 vertonen.
  - (c) Gebruik w-toets, aanpassen van de precisie van waarnemingen met grote toetswaarde.
  - (d) De twee voorgaande stappen worden iteratief meerdere keren doorlopen totdat de F-toets geaccepteerd is, de w-toets (en evt. t-toets) geen waarneming meer verwerpt en de variantiecomponenten in de buurt van 1 liggen.
3. Aangesloten vereffening:
  - (a) Berekening als pseudo constrained bij aansluiting op grondslag die niet gewijzigd mag worden, anders (vooral bij deformatiemetingen!) als weighted constrained.
  - (b) Via w-toets, t-toets en variantiecomponentenschattting aanpassen kansmodel stations, totdat geen stations meer verworpen worden en de variantiecomponent voor stations in de buurt van 1 ligt.
  - (c) Evt. herzien van het kansmodel van de waarnemingen totdat geen waarnemingen meer verworpen worden, alle variantiecomponenten in de buurt van 1 liggen, en de F-toets geaccepteerd is.

## Referenties

- [Baarda 1968] Baarda, Willem: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Publications on Geodesy 9 (Vol. 2 Nr. 5), 1968. Nederlandse Geodetische Commissie.
- [Förstner 1979] Förstner, Wolfgang: Ein Verfahren zu Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 86. Jahrgang(11-12), 1979.
- [MOVE3 2016] Gebruikershandleiding MOVE3 versie 4.4. Sweco Nederland BV, 2016.

- [Navratil 2006] Navratil, Gerhard: Ausgleichsrechnung II. Institut for Geoinformation, Universität Wien, 2006.
- [Velsink 1998] Velsink, Hiddo: Waarnemingsrekening voor toepassing in de Geodesie. Hogeschool Utrecht, 1998.

Deze lijst is zeer beknopt. De bovengenoemde documenten verwijzen naar een grote hoeveelheid gerelateerde literatuur.